
Voroneho diagramy

Semestrální práce
z předmětu
Matematické
modelování

Bc. Tomáš Kraus

Úvod

Tato semestrální práce je vytvořena pro předmět Matematické modelování v akademickém roce 2013/14 a jejím smyslem je seznámit ostatní posluchače předmětu s pojmem Voroneho diagramy.

V první kapitole uvádím stručnou historii Voroneho diagramů a také důvod, proč se nazývají právě takto.

Ve druhé kapitole je popsán motivační problém, který vede k definici Voroneho diagramů. Tento problém bývá také nazýván Poštovní problém.

Velmi důležitá je třetí kapitola, kde jsou Voroneho diagramy definovány a jsou zde uvedeny i některé jejich vlastnosti.

Další velmi důležitou kapitolou je čtvrtá kapitola, kde jsou popsány některé algoritmy pro konstrukci Voroneho diagramů. Tzv. inkrementální algoritmus je popsán podrobněji, jelikož je velmi často pro své dobré vlastnosti používán.

V kapitole páté jsou naznačeny možnosti zobecňování Voroneho diagramů. Právě až při změnách základních podmínek, tj. zobecňování, Voroneho diagramů je možno je ve velké míře využívat v praxi.

Na závěr jsou v šesté kapitole stručně popsány různé obory, ve kterých se Voroneho diagramy nejvíce uplatňují.

Historie

Nejdříve je třeba si položit otázku, čeho se vůbec Voroneho diagramy týkají. Při studiu Voroneho diagramů jde o rozdělení nějaké oblasti do systému jejích podoblastí, které mají společné nejvýše své hranice. Toto rozdělení můžeme provádět různými způsoby. Jedním ze základních způsobů je najít v oblasti určitý počet center (bodů) a okolo každého centra vytvořit jednu podoblast. Podoblast příslušná k danému centru bude pokrývat všechny body, které mají do tohoto centra blíže než do kteréhokoli jiného. A takto si intuitivně můžeme představit i Voroneho diagramy.

Studiem rozdělení prostoru do podoblastí (regionů, buněk) se lidé vážně zabývali již od sedmnáctého století, kdy je používal René Descartes. Velký rozvoj přineslo však až století devatenácté, kdy je zkoumal např. německý matematik Lejeune Dirichlet, a dvacáté. Právě na přelomu devatenáctého a dvacátého století zkoumal takováto rozdělení prostoru jistý ukrajinský matematik Georgij Feodosjevič Voronoj. Výsledky jeho bádání byly natolik zásadní, že se po něm takováto rozdělení pojmenovala Voroneho diagramy. Tohoto označení se budeme držet i my. V literatuře se lze setkat ale i s označením Voroneho teselace, Voroneho dekompozice, případně Voronojovy diagramy apod. Voroneho diagramům se v průběhu dvacátého století věnovalo mnoho odvětví vědy a také se pro ně leckde používá i jiný název. Např. v meteorologii se nazývají Thiessenovy polygony po americkém meteorologovi Alfredu Thiessenovi.

S rozvojem počítačů ve druhé polovině dvacátého století se Voroneho diagramy uplatňovaly stále více v počítačové grafice. Počítačové simulace zároveň naopak pomohly při studiu dalších vlastností Voroneho diagramů. V současné době představují Voroneho diagramy velmi zajímavé téma a používají se a studují v mnoha různých oborech. Proto je určitě užitečné poznat alespoň jejich základní definici a vlastnosti, které jsou uvedeny v této semestrální práci, a získat o nich jistý přehled.

Motivace

Zde si popíšeme takzvaný Poštovní problém. Trochu si ho ale upravíme. Nebudeme stavět poštu, ale nákupní středisko.

Mějme za úkol postavit nákupní středisko (analogicky poštu) v dané oblasti. Samozřejmě chceme, aby do našeho nákupního střediska chodilo nakupovat co nejvíce lidí. V dané oblasti je více podobných středisek a my se ptáme, kolik lidí by právě do našeho nákupního střediska chodilo nakupovat. Vytvoříme si rovinnou mapu, kde budou vyznačena všechna nákupní střediska a také označeny oblasti, ze kterých chodí lidé nakupovat do daných středisek.

Pro zjednodušení si ale zavedeme čtyři podmínky:

- 1) Ve všech střediscích je cena zboží stejná.
- 2) Náklady na získání zboží se rovnají součtu jeho ceny a ceny dopravy do střediska.
- 3) Cena dopravy do střediska se rovná vzdálenosti (eukleidovské) do střediska násobené pevnou cenou za jednotku vzdálenosti (např. kilometr).
- 4) Lidé chtějí minimalizovat své náklady na získání zboží.

Z těchto podmínek vyplývá, že lidé budou chodit do střediska, které mají nejbližší. Daná oblast se tedy rozdělí do menších podoblastí. V každé podoblasti bude jedno nákupní středisko a lidé, kteří chodí právě do tohoto střediska. Tím máme hotový matematický model problému. Prakticky jsme vytvořili Voroneho diagram. Z něho pak můžeme vyčíst, kde nejlépe vybudovat nové středisko či zda nějaké středisko zbourat apod.

V reálném životě však nejsou často splněny uvedené čtyři podmínky. Např. cena zboží v různých nákupních střediscích je různá a cena dopravy do střediska neroste lineárně s eukleidovskou vzdáleností od střediska. To však neznamená, že se Voroneho diagramy neuplatní v reálném životě. Naopak. Musí se ale upravit tyto čtyři podmínky a Voroneho diagramy zobecnit, čímž se ale nebudeme zatím zabývat.

Základní pojmy, vztahy

Mějme množinu n bodů v rovině $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Tyto body nazýváme generující body.

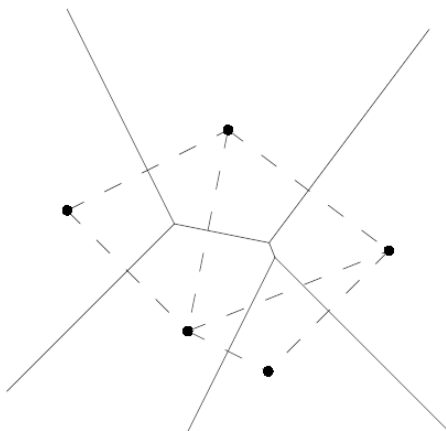
Voroneho diagram množiny P je rozdělení roviny na n oblastí, přičemž v každé oblasti je právě jeden bod P_i (různé oblasti obsahují různé body P_i) a všechny body roviny, které mají k tomuto bodu menší vzdálenost než k ostatním bodům P_j . Pro každý bod Q v oblasti příslušné bodu P_i tedy platí vztah:

$$|QP_i| < |QP_j| \quad (\forall P_j \in P, j \neq i)$$

Výraz $|PQ|$ označuje eukleidovskou vzdálenost dvou bodů P a Q . Připomínáme, že eukleidovská vzdálenost dvou bodů $P = [p_x, p_y]$ a $Q = [q_x, q_y]$ je dána vztahem:

$$|PQ| = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$$

Voroneho diagram množiny P se značí $Vor(P)$. Oblast Voroneho diagramu příslušnou k bodu P_i nazýváme Voroneho buňkou bodu P_i a značíme $v(P_i)$. Ukázku Voroneho diagramu pro pět generujících bodů viz na obr. 1.

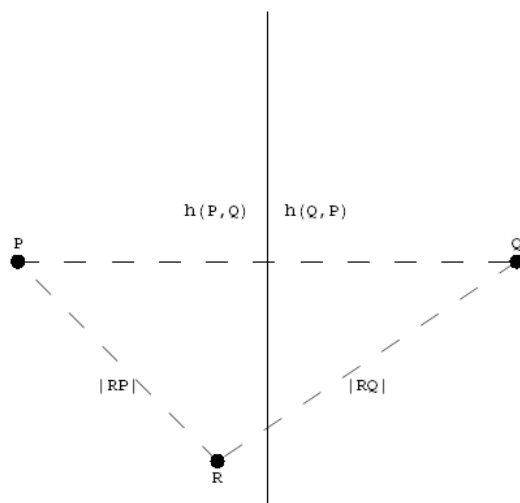


Obr. 1 Voroneho diagram

Osa úsečky PQ dvou bodů roviny P a Q rozděluje rovinu na dvě poloroviny. Označíme $h(P, Q)$ otevřenou polorovinu obsahující bod P a $h(Q, P)$ otevřenou polorovinu obsahující bod Q . Pro každý bod R Voroneho diagramu pak platí:

$$R \in h(P, Q) \Leftrightarrow |RP| < |RQ|$$

Uvedený vztah ilustruje obrázek 2.



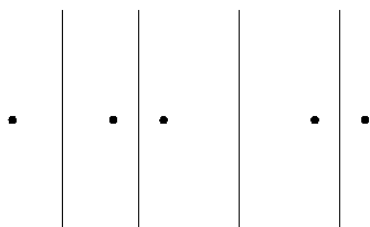
Obr. 2 Voroneho diagram pro dva body P a Q

Každá Voroneho buňka je průnikem $n - 1$ polorovin, což můžeme pro Voroneho buňku $v(P_i)$ zapsat rovností:

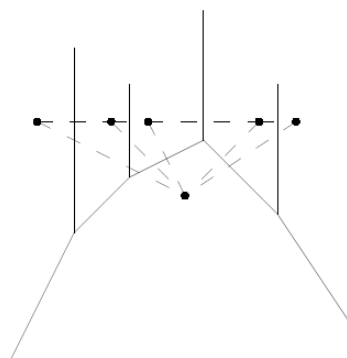
$$v(P_i) = \bigcap_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} h(P_i, P_j)$$

Snadno nahlédneme, že je každá Voroneho buňka otevřená konvexní mnohoúhelníková oblast a je ohraničená nejvýše $n - 1$ vrcholy a nejvýše $n - 1$ hranami.

Voroneho diagram tedy rozděluje rovinu na n buněk, které mají společné nejvýše své hranice. Tyto hranice jsou úsečky, polopřímky nebo přímky a nazývají se hrany Voroneho diagramu. Pokud jsou všechny generující body kolineární, tj. leží na téže přímce, pak jsou všechny hrany Voroneho diagramu přímkami. Pokud existuje alespoň jeden generující bod, který neleží na téže přímce jako ostatní, tj. body nejsou kolineární, pak jsou všechny hrany tohoto diagramu buď úsečky, nebo polopřímky.



Obr. 3 Voroneho diagram pro kolineární body



Obr. 4 Voroneho diagram pro nekolineární body

Pro pochopení další vlastnosti Voroneho buněk potřebujeme vědět, co je to konvexní mnohoúhelník, konvexní oblast a konvexní obal. Konvexní mnohoúhelník je každý mnohoúhelník, jehož každý vnitřní úhel je větší než 0° a menší nebo roven 180° . Konvexní oblastí rozumíme bodovou množinu, která je ohraničena konvexním mnohoúhelníkem a obsahuje každou úsečku, jejíž krajní body patří do této oblasti. Konvexním obalem množiny bodů P pak nazýváme nejmenší konvexní oblast obsahující množinu P a značíme ho $CH(P)$.

Voroneho buňka $v(P_i)$ je neohraničená, právě když bod P_i leží na hranici konvexního obalu $CH(P)$.

Ve Voroneho diagramu mají často hrany společný nějaký svůj krajní bod. Bod, jenž je společným bodem alespoň tří Voroneho hran, nazýváme Voroneho vrcholem. Pro každý Voroneho diagram dokážeme určit maximální počet jeho hran a maximální počet jeho vrcholů. Pro Voroneho diagram o dvoubodové generující množině máme jednu hranu a žádný vrchol. Pro tři a více generujících bodů dokážeme maximální počet hran x určit podle vzorce $x = 2n - 6$ a maximální počet vrcholů y podle vzorce $y = 3n - 6$, kde n je počet generujících bodů.

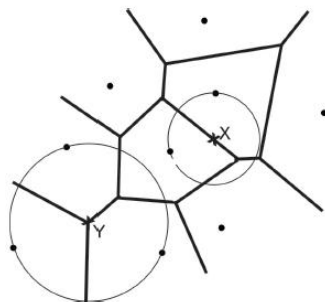
Hrany jsou tedy části os úseček dvou generujících bodů a vrcholy jsou průsečíky těchto os. Na každé ose ovšem nemusí být Voroneho hrana. Rovněž ne všechny průsečíky těchto os jsou Voroneho vrcholy. Lze zjistit, na které části osy úsečky PQ dvou generujících bodů P a Q leží Voroneho hrana a které jejich průsečíky jsou Voroneho vrcholy? Ano, ale ještě si musíme zavést jeden pomocný pojem:

Pro bod Q v rovině (Voroneho diagramu) definujeme kružnici $C_p(Q)$ jako největší kružnici se středem v bodě Q , v jejímž vnitřku neleží žádný bod generující množiny P .

Část osy úsečky dvou generujících bodů P_i a P_j je hranou Voroneho diagramu, právě když na ose úsečky P_iP_j existuje takový bod X , že na kružnici $C_p(X)$ leží pouze generující body P_i a P_j .

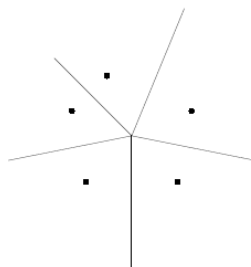
Průsečík Y osy úsečky dvou generujících bodů P_i a P_j je Voroneho vrcholem, právě když na kružnici $C_p(Y)$ leží tři nebo více generujících bodů množiny P .

Obě uvedené věty ilustruje obrázek 5.



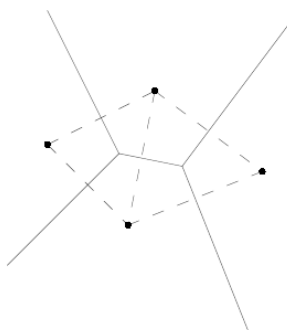
Obr. 5 Kružnice ve Voroneho diagramu

Dalším pojmem, který se zavádí ve Voroneho diagramech, je degenerace Voroneho diagramu. Jak již bylo řečeno, každý vrchol Voroneho diagramu leží v místě, kde se střetávají alespoň tři Voroneho hrany. Obvykle jsou to právě tři hrany. Pokud ale existuje čtyři a více generujících bodů ležících na jedné kružnici, pak vzniká Voroneho vrchol na čtyřech nebo více Voroneho hranách (pokud ovšem vnitřek této kružnice neobsahuje nějaký další generující bod). Potom hovoříme o degenerativním Voroneho diagramu a nastalá situace se nazývá degenerace Voroneho diagramu.



Obr. 6 Degenerativní Voroneho diagram

Shrnuli jsme si tedy základní vlastnosti Voroneho diagramů. Ještě než přejdeme k algoritmům jejich vytváření, zmiňme se o důležitém pojmu, kterým je Delaunayho triangulace.



Obr. 7 Delaunayho triangulace

Delaunayho triangulaci získáme, pokud ve Voroneho diagramu spojíme úsečkou všechny generující body, jejichž buňky spolu sousedí, a hrany Voroneho diagramu vynecháme. Delaunayho triangulace je tedy duální strukturou k Voroneho diagramu. Pokud je Voroneho diagram degenerovaný, nejedná se o triangulaci v pravém slova smyslu, jelikož vzniknou i jiné mnohoúhelníky než trojúhelníky. Tyto mnohoúhelníky ovšem můžeme na menší trojúhelníky převést dalším spojením generujících bodů. Dokonce platí, že každou triangulaci, tj. rozdělení roviny do trojúhelníků, lze převést na Delaunayho triangulaci. Při tom využíváme vlastnosti, že daná triangulace ve Voroneho diagramu je Delaunayho, právě když žádná kružnice opsaná jednomu dílčímu trojúhelníku neobsahuje uvnitř žádný generující bod Voroneho diagramu. Postupujeme podle překlápěcího algoritmu, tj. postupně překlápíme trojúhelníky podle obrázku 8.



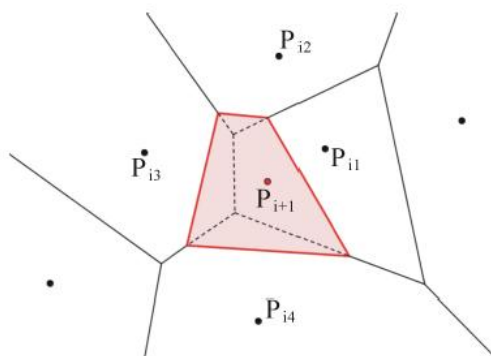
Obr. 8 Překlápěcí algoritmus

Algoritmy

Pro sestrojení Voroneho diagramů existuje hned několik algoritmů. Všechny mají své výhody a nevýhody. Jejich výhodnost posuzujeme především podle jejich časové složitosti. Optimální časová složitost pro konstrukci Voroneho diagramu je $O(n \log n)$.

Tzv. naivní algoritmus vychází přímo z definice Voroneho diagramu. Pro každý generující bod P_i vytvoříme průnik $n - 1$ polorovin $h(P_i, P_j)$, kde $1 \leq j \leq n, j \neq i$. Tento průnik je Voroneho buňka $v(P_i)$. Naivní algoritmus má časovou složitost $O(n^2 \log n)$, a proto se často nepoužívá.

Často používaným je však tzv. inkrementální algoritmus. Tento algoritmus je jednoduchý a má dobrou časovou složitost, a proto si ho popíšeme podrobněji.



Obr. 9 Inkrementální algoritmus

Hlavní myšlenkou je vytvořit Voroneho diagram pro dva generující body a poté postupně přidávat další generující body a pro každý upravit Voroneho diagram. Až budeme mít v diagramu všechny generující body, budeme mít hotový i celý Voroneho diagram. Popíšme si kroky tohoto algoritmu:

- 1) Určíme, v jaké buňce se nachází nově přidávaný generující bod P_{i+1} , tuto buňku označíme $v(P_{i1})$.
- 2) Zkonstruujeme osu úsečky $P_{i+1}P_{i1}$. (Bod P_{i1} je samozřejmě generujícím bodem buňky $v(P_{i1})$.)
- 3) Z průsečíků úsečky $P_{i+1}P_{i1}$ s hranou $v(P_{i1})$ si vybereme jeden, který určí další buňku $v(P_{i2})$, která bude také ovlivněna generujícím bodem P_{i+1} .
- 4) Zkonstruujeme osu úsečky $P_{i+1}P_{i2}$ a její průsečíky s hranou buňky $v(P_{i2})$. Vybereme průsečík, který neleží na společné hraně buněk $v(P_{i1})$ a $v(P_{i2})$.
- 5) Opakujeme krok 4 pro další body P_{ij} , dokud se nedostaneme do druhého průsečíku osy úsečky $P_{i+1}P_{i1}$ s hranicí buňky $v(P_{i1})$.

6) Vyrůžeme všechny hrany uvnitř nově vzniklé Voroneho buňky.

Přidání jednoho generujícího bodu tímto algoritmem můžete pozorovat na obr. 2. Pro přesnost je třeba dodat, že u degenerativních algoritmů je třeba ještě ošetřit několik eventualit. Tento algoritmus má obecně časovou složitost $O(n^2)$, ale ve speciálních případech i $O(n)$. Další výhodou je, že pokud chceme Voroneho diagram ještě rozšířit, nemusíme ho celý přepočítávat, ale stačí přidat další generující bod podle tohoto algoritmu. Je to jeden z nejpoužívanějších algoritmů.

Dalším velmi často používaným algoritmem je tzv. Fortuneho algoritmus. Při něm si zvolíme tzv. zametací přímku, kterou posouváme, a to nejčastěji odshora dolů. Průsečíky této přímky s Voroneho diagramem vytvářejí hrany Voroneho diagramu. Při tom je ale třeba mít na vědomí, že Voroneho hrany závisejí také na generujících bodech, které jsou pod zametací přímkou a které ještě neznáme. Tento problém lze ale zdárně vyřešit užitím speciálních parabolických oblouků. Tyto parabolické oblouky určují vzdálenost bodů od pevně daného generujícího bodu a zametací přímky a postupně zanikají či vznikají nové. Zároveň již postupně určují definitivně Voroneho hrany. Časová složitost tohoto algoritmu je optimální $O(n \log n)$, a proto také patří k nejčastěji používaným.

Posledním častou užívaným algoritmem, který uvedeme, je algoritmus Rozděl a panuj. Ten je založen na rozdělení množiny generujících bodů do dvojic či trojic, pro které snadno zkonstruujeme dílčí Voroneho diagramy. Tyto dílčí diagramy poté při zpětném chodu spojíme v celý Voroneho diagram. Tento algoritmus má také optimální časovou složitost, ale je náchylný k numerickým chybám.

Zmiňme ještě, že lze Voroneho diagram zkonstruovat i z Delaunayho triangulace.

Možnosti zobecnění

Zatím jsme se věnovali pouze základnímu typu Voroneho diagramů, který odpovídá uvedenému Poštovnímu problému.

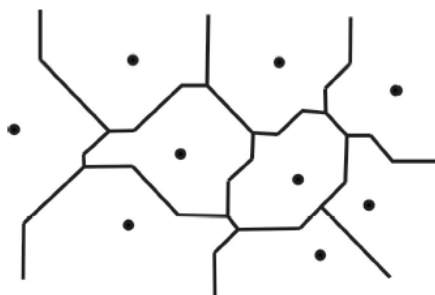
Pro praktické využití Voroneho diagramů je ale třeba je poněkud zobecnit. To lze několika způsoby.

Za prvé můžeme změnit dimenzi prostoru, ve kterém vytváříme diagramy. V tomto případě pouze upravíme definici Voroneho diagramu s tím, že se již bude jednat o eukleidovské vzdálenosti v k -dimenzionálním prostoru.

Za druhé můžeme změnit metriku Voroneho diagramu, tzn. nebudeme již uvažovat pouze eukleidovskou vzdálenost. Často jsou například používány metriky L_p . V metrice L_p bude vzdálenost dvou bodů $P = [p_1, p_2, \dots, p_k]$ a $Q = [q_1, q_2, \dots, q_k]$ v prostoru R^k :

$$\text{dist}_p(P, Q) = \|PQ\| = \left(\sum_{i=1}^k |p_i - q_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pro metriku L_2 se jedná o již známou eukleidovskou vzdálenost.



Obr. 10 Voroneho diagram v metrice L_1 .

Další možností zobecnění Voroneho diagramu je přidání vah jednotlivým generujícím bodům. Vzniknou tak vážené Voroneho diagramy. V Poštovním problému by to znamenalo, že v různých nákupních střediscích jsou různé ceny.

Čtvrtým nejdůležitějším případem zobecnění Voroneho diagramu je uvažování generující množiny nikoliv jako množiny bodů, ale jako množiny úseček či jiných geometrických útvarů.

Oblasti použití

Voroneho diagramy v metrice L_1 jsou např. používány podobně jako při poštovním problému v případech, kdy je třeba určit ideální rozmístění poboček nějaké firmy, pošt, nemocnic apod. Eukleidovskou vzdálenost zde není vhodné používat, jelikož ta měří vzdálenost vzdušnou čarou, zatímco lidé mají při cestě do pobočky překážky v podobě domů, řek apod.

Samozřejmě se Voroneho diagramy používají v matematice, a to obzvláště v geometrii.

V klimatologii se používají jako Thiessenovy polygony např. při výpočtu srážek na nějakém území.

V chemii a fyzice se pomocí Voroneho diagramů studují buňky. V krystalografii se zase používají k výzkumu krystalických buněk.

V epidemiologii se používají Voroneho diagramy k lokalizaci oblastí šíření nemocí.

V hornictví se pomocí Voroneho diagramů odhadují zásoby vzácných nerostů, kovů i jiných materiálů.

Pomocí Voroneho diagramů se mohou programovat roboti. Dále naleznou Voroneho diagramy široké uplatnění v počítačové grafice a obecně v informatice.

Nesmíme zapomenout ani na umění, kde jsou využívány Voroneho diagramy pro své estetické vlastnosti.

Podrobný popis jejich využití v různých oborech již přesahuje rámec této práce, ale smyslem této kapitoly bylo upozornit na to, že Voroneho diagramy nejsou jen nějakou matematickou strukturou, ale nalézají široké uplatnění v praxi.

Závěr

Nyní již tedy víme, co jsou to Voroneho diagramy. Nesplete nás ani, když se o nich mluví jako o Voroneho dekompozici. Známe některé jejich vlastnosti a dokážeme i Voroneho diagram vytvořit. Celkově máme dobrou představu o Voroneho diagramech. Zároveň ale víme, že pro jejich použití je třeba je zobecnit, a to různými způsoby. Pro další studium je třeba se podívat do literatury. V češtině existuje leckde nějaký úvod do problematiky, jako je např. tato práce, ale opravdu vědeckou práci s podrobnějšími a praktičtějšími výsledky hledejte spíše v angličtině. Dobrá je např. publikace Computational Geometry (ISBN 3-540-65620-0).

Literatura

- [1] BASTL, Bohumír. Voroneho diagramy [online]. Plzeň, 2013 [cit. 2014-02-01].
Dostupné z: <http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/view/full/279/>. Studijní materiál. ZČU.
- [2] Voroneho diagramy. Plzeň, 2009. Bakalářská práce. ZČU.
- [3] Zobecněné Voroneho diagramy. Plzeň, 2012. Diplomová práce. ZČU.
- [4] Voronoi diagram. Wikipedia, the free encyclopedia [online]. 2014 [cit. 2014-02-01]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Voronoi_diagram